ZBIORY LICZBOWE

Zbiór liczbowy to zbiór, którego elementami są liczby.

ZBIÓR LICZB NATURALNYCH N
N = {0, 1, 2, 3,... }
W zbiorze liczb naturalnych najmniejszą liczbą jest 0. Następne liczby powstają przez dodanie 1 do poprzedniej.
W zbiorze liczb naturalnych nie ma liczby największej - zbiór jest nieskończony.

ZBIÓR LICZB CAŁKOWITYCH Z (często oznacza się liczby całkowite literą C)
Z = { ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}
Liczby całkowite to liczby naturalne i do nich przeciwne.
Zbiór liczb całkowitych jest zbiorem nieskończonym - nie ma elementu najmniejszego, ani największego.

ZBIÓR LICZB WYMIERNYCH Q (zbiór liczb wymiernych oznacza się również literą W)
Każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego okresowego:
$\frac{p}{q}$, gdzie p jest liczbą całkowitą, q liczbą całkowitą różną od zera.
Rozwinięcie dziesiętne liczby, otrzymuje się przez podzielenie p przez q, np.:
$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$ - rozwinięcie dziesiętne skończone

$\frac{2}{3} = 0,666666... = 0,(6)$ - rozwinięcie dziesiętne nieskończone, okresowe (liczba 6 jest okresem rozwinięcia)

ZAMIANA UŁAMKA DZIESIĘTNEGO NIESKOŃCZONEGO OKRESOWEGO NA UŁAMEK ZWYKŁY
Przykład:
Mamy przedstawić ułamek 0, 33333... = 0,(3), w postaci ułamka zwykłego.
Przyjmijmy: a = 0,3333... i pomnóżmy obie strony równania przez 10 (okresem ułamka jest jedna liczba - 3).
Otrzymamy: 10a = 3,333..., a więc 10a = 3 + 0,333..., czyli 10a = 3 + a.
Obliczamy a z danego równania: 10a - a = 3, to 9a = 3
Ostatecznie mamy: $a = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Jeżeli okresem ułamka będą 2 liczby, np.; 0,2727... = 0,27, postępujemy bardzo podobnie jak w powyższym przykładzie, jedynie obie strony równania będziemy mnożyć przez 100:
a = 0,2727..., a więc po pomnożeniu przez 100, otrzymujemy: 100a = 27, 27...
czyli 100a = 27 + 0,27...
100a = 27 + a. Wyznaczając a z równania otrzymujemy: $a = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$
W przypadku kiedy okresem ułamka będą 3, 4, ... itd. liczby,

postępujemy podobnie, mnożąc obie strony równania odpowiednio przez 1000, 10000, …itd

ZBIÓR LICZB NIEWYMIERNYCH NW
liczbą niewymierną nazywamy tę liczbę, która nie jest liczbą wymierną, a więc nie da się przedstawić w postaci ilorazu liczb p i q.
Rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej jest nieskończone i nieokresowe.
Do liczb niewymiernych zaliczamy np.: $\sqrt{2}$, liczbę pi

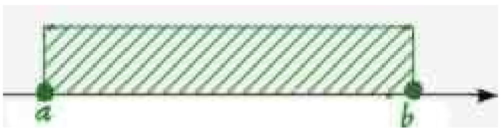
ZBIÓR LICZB RZECZYWISTYCH R
Zbiór liczb rzeczywistych to zbiór liczb, które możemy zapisać za pomocą rozwinięcia dziesiętnego skończonego lub nieskończonego.
Do zbioru liczb rzeczywistych zaliczamy wszystkie omówione wcześniej zbiory liczb, a więc zbiór liczb: naturalnych, całkowitych, wymiernych i niewymiernych - są one podzbiorami zbioru R.

PRZEDZIAŁY LICZBOWE

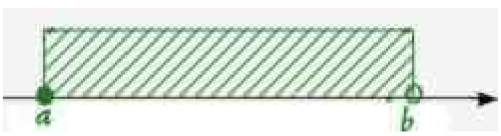
PRZEDZIAŁY OGRANICZONE

przedział otwarty (a, b) - do przedziału należą wszystkie liczby leżąca na osi liczbowej między liczbami a i b, bez tych liczb.

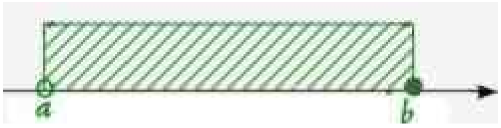
przedział obustronnie domknięty [a, b] - do przedziału należą wszystkie liczby leżąca na osi liczbowej między liczbami a i b, włącznie z tymi liczbami:
$\langle a; b\rangle = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$.



przedział lewostronnie domknięty [a, b) - do przedziału należą wszystkie liczby leżąca na osi liczbowej między liczbami a i b, włącznie z liczbą a, bez liczby b:
$\langle a; b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$.



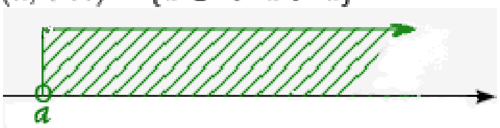
<u>przedział prawostronnie domknięty (a, b]</u> - do przedziału należą wszystkie liczby leżąca na osi liczbowej między liczbami a i b, włącznie z liczbą b, bez liczby a:
$(a;b\rangle = \{x \in R : a < x \le b\}$.



PRZEDZIAŁY NIEOGRANICZONE

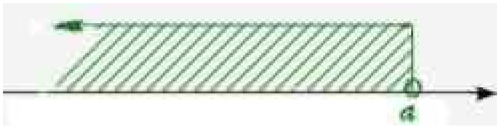
Przedział lewostronnie otwarty
i prawostronnie nieograniczony

$(a;+\infty) = \{x \in R : x > a\}$



Przedział prawostronnie otwarty
i lewostronnie nieograniczony

$(-\infty; a) = \{x \in R : x < a\}$

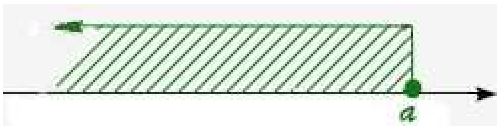


Przedział lewostronnie domknięty
i prawostronnie nieograniczony

$\langle a;+\infty) = \{x \in R : x \ge a\}$

Przedział prawostronnie domknięty
i lewostronnie nieograniczony

$(-\infty; a\rangle = \{x \in R : x \le a\}$



DZIAŁANIA I PRAWA DZIAŁAŃ

DODAWANIE SUMA	a + b = c liczby a i b - składniki sumy c - wartość sumy	a + 0 = a 0 - element neutralny dodawania prawo przemienności dodawania: a + b = b + a prawo łączności dodawania: (a + b) + c = a + (b + c)
ODEJMOWANIE RÓŻNICA	a - b = c a - odjemna b - odjemnik c - wartość różnicy	a - b = a + (- b) a - b = c <==> a = b + c Odejmowanie jest działaniem odwrotnym do dodawania
MNOŻENIE ILOCZYN	a * b = c liczby a i b - czynniki c - wartość iloczynu	a * 1 = a 1 - element neutralny mnożenia prawo przemienności mnożenia: a * b = b * a prawo łączności mnożenia: (a * b) * c = a * (b * c) prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: a * (b + c) = a * b + a * c
DZIELENIE ILORAZ	a : b = c a - dzielna b - dzielnik c - wartość ilorazu	a : b = a * (1/b), gdzie b różne od 0 jeżeli b różne od 0, to a : b = c <==> a = b * c Dzielenie jest działaniem odwrotnym do mnożenia.

CECHY PODZIELNOŚCI LICZB

LICZBY PIERWSZE - to takie liczby naturalne, które mają tylko dwa dzielniki: 1 i samą siebie.

LICZBY ZŁOŻONE - to takie liczby naturalne, które mają więcej niż dwa dzielniki.

NAJWIĘKSZY WSPÓLNY DZIELNIK pary liczb naturalnych a i b - NWD(a, b), to największa liczba naturalna przez którą dzieli się bez reszty zarówno a jak i b.

NAJMNIEJSZA WSPÓLNA WIELOKROTNOŚĆ pary liczb naturalnych a i b - NWW(a, b), to najmniejsza liczbę naturalna przez którą dzieli się bez reszty zarówno a jak i b.

LICZBY WZGLĘDNIE PIERWSZE, to liczby naturalne, dla których największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1 (NWD(a, b)=1).

Liczba naturalna jest podzielna przez:

2	gdy jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6, 8 (inaczej: gdy jest liczbą parzystą)
3	gdy suma jej cyfr dzieli się przez 3
4	gdy liczba, wyrażona dwiema ostatnimi cyframi, dzieli się przez 4
5	gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 albo 5
6	gdy dzieli się przez 2 i przez 3
7	gdy różnica między liczbą wyrażoną kolejnymi trzema ostatnimi cyframi danej liczby, a liczbą wyrażoną pozostałymi cyframi tej liczby dzieli się przez 7
8	gdy liczba wyrażona trzema ostatnimi jej cyframi dzieli się przez 8
9	gdy suma jej cyfr dzieli się przez 9
10	gdy ostatnią jej cyfrą jest 0
11	gdy różnica sumy jej cyfr stojących na miejscach parzystych i sumy cyfr stojących na miejscach nieparzystych, dzieli się przez 11

POTĘGI I PIERWIASTKI

POTĘGĄ liczby rzeczywistej o wykładniku naturalnym n (n większe lub równe 1) nazywamy iloczyn n jednakowych czynników:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

Jeżeli a jest różne od zera i n = 0, to $a^0 = 1$
Jeżeli a jest dowolną liczbą rzeczywistą i n = 1, to $a^1 = a$

$a^n = b$
gdzie: a^n - n- ta potęga liczby a (czytamy a do potęgi n)
n - wykładnik potęgi
a - podstawa potęgi
b - wartość potęgowania

Jeżeli wykładnik potęgi n = 2, to czytamy kwadrat liczby a, np.: $4^2 = 16$ (kwadrat liczby 4 wynosi 16)
Jeżeli wykładnik potęgi n = 3, to czytamy sześcian liczby a, np.: $2^3 = 8$ (sześcian liczby 2 wynosi 8)

Potęga liczby o wykładniku całkowitym ujemnym	Potęga liczby o wykładniku wymiernym dodatnim	Potęga liczby o wykładniku wymiernym ujemnym
a należy do zbioru R oprócz 0, n do zbioru N^+ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ przykład: $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	a należy do zbioru R^+ razem z 0, m do zbioru N^+ n do zbioru N^+ oprócz 1 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ przykład: $5^{-1} \cdot 25^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$	a należy do zbioru R^+, m do zbioru N^+ n do zbioru N^+ oprócz 1 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Działania na potęgach

Podstawy potęg a i b należą do zbioru liczb rzeczywistych, a wykładniki potęg m i n do zbioru liczb całkowitych

iloczyn potęg o tych samych podstawach	iloraz potęg o tych samych podstawach	potęga iloczynu	potęga ilorazu	potęga potęgi
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^m : a^n = a^{m-n}$ dla $m > n \wedge a \neq 0$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ dla $b \neq 0$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

PIERWIASTKIEM stopnia n liczby nieujemnej a, nazywamy taką liczbę nieujemną b, która podniesiona do potęgi n daje a:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a, \text{ gdzie } a \geq 0. b \geq 0, n \in N, n \geq 2$$

n - stopień pierwiastka
a - liczba podpierwiastkowa
b - pierwiastek n-tego stopnia z liczby a (wartość pierwiastkowania)

Nie określa się pierwiastków liczb ujemnych.

Przykład: $\sqrt{16} = 4$, **bo $4^2 = 16$**
$\sqrt[3]{125} = 5$, **bo $5^3 = 125$**

Działania na pierwiastkach

Liczby podpierwiastkowe a i b są dodatnie (mogą być 0), a stopnie m i n pierwiastka są liczbami naturalnymi oprócz 0 i 1.

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	**b nie może być równe 0** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$	$(\sqrt[n]{a})^n = a$

PROCENTY

Jeden procent (1%) pewnej liczby a (lub innej wielkości), nazywamy setną część tej liczby (wielkości) i oznaczamy 1% a

$$1\%a \text{ jest równe } \frac{1}{100}\cdot a \qquad p\%a \text{ jest równe } \frac{p}{100}\cdot a$$

Aby liczbę zamienić na procent, należy tę liczbę pomnożyć przez 100 i dopisać symbol %, np.:
0,25 . 100% = 25%
2 . 100% = 200%

Aby procent zamienić na liczbę, należy liczbę wyrażającą procent pomnożyć przez 0,01 (podzielić przez 100)np.:
12% = 12 : 100 = 0,12
250% = 250 : 100 = 2,5

Aby obliczyć procent danej liczby należy pomnożyć tę liczbę przez dany procent, np.:
5% liczby 300, to 5% . 300 = 0,05 . 300 = 15
25% liczby 1000, to 25% . 1000 = 0,25 . 1000 = 250

Aby obliczyć liczbę z danego jej procentu, należy podzielić tę liczbę przez dany procent. 5% pewnej liczby wynosi 40, to 40 : 5% = 40 : 0,05 = 800
20% pewnej liczby wynosi 6, to 6 : 20% = 6 : 0,20 = 30

Aby obliczyć jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, należy drugą liczbę podzielić przez pierwszą i otrzymany iloraz wyrazić w procentach, np.:
Jakim procentem liczby 10 jest liczba 2? (2 : 10) . 100% = 20%
Jakim procentem liczby 200 jest liczba 4? (5 : 200) . 100% = 2%

OBLICZANIE ODSETEK

Dla łatwego zapamiętania wzoru na obliczanie odsetek od kapitału, zapamiętaj "kapelusz na stole".
"ka" - "pe" - "el" na sto:
k - kapitał
p - procent od kapitału
l - lata (czas złożenia pieniędzy w banku lub długość kredytu)
d - odsetki od kapitału

$$d = \frac{k\cdot p\cdot l}{100}$$

PROCENT SKŁADANY to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego K, polegający na doliczaniu rocznego dochodu w postaci odsetek do wkładu, który procentuje wraz z wkładem w następnym roku.

$$K = K_o(1 + \frac{p}{100k})^{n \cdot k}$$

gdzie: K - wysokość kredytu do spłaty
K_o - otrzymany kredyt
p - oprocentowanie
n - liczba lat spłaty
k - liczba kapitalizacji w roku

CIEKAWE LICZBY

LUDOLFINA - liczba pi - π

Nazwa "ludolfina" pochodzi od imienia matematyka holenderskiego Ludolfa van Ceulena, który w 1610 roku obliczył wartość liczby pi z dokładnością do 35 cyfr po przecinku.
π=3,1415926535897932384626433832795028
Symbol liczby po raz pierwszy został użyty w 1706 roku przez matematyka angielskiego Wiliama Jonesa, ale powszechnie zaczął być używany dopiero w połowie XVIII wieku po wydaniu przez L.Eulera "Analizy".
Pierwsze oszacowania liczby wprowadzili Babilończycy około 2000 p.n.e., przyjmując jej wartość równą 3.
Liczba π jest liczbą niewymierną, określającą stosunek długości okręgu do długości jego średnicy.

W celu zapamiętania pierwszych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczb, wystarczy poznać jeden z wielu powstałych wierszy. Licząc litery w poszczególnych wyrazach otrzymujemy kolejne cyfry π.
Najbardziej znany jest wiersz Kazimierza Cwojdzińskiego:

Kuć i orać w dzień zawzięcie,
bo plonów niema bez trudu.
Złocisty szczęścia okręcie kołyszesz...
Kuć. My nie czekajmy cudu.
Robota. To potęga ludu.

LICZBY BLIŹNIACZE

Dwie liczby pierwsze, których różnica wynosi 2, to liczby bliźniacze. Przykładami par liczb bliźniaczych są: 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19.

LICZBY PALINDROMICZNE

Liczbę naturalną, którą czyta się tak samo od początku i od końca nazywamy palindromem.
Przykłady liczb palindromicznych: 66, 323, 494, 30703, 5139315...

LICZBY LUSTRZANE

To takie dwie liczby, które są lustrzanym odbiciem, np.: 98 i 89, 123 i 321, 1245 i 5421...
Jeżeli napiszemy dowolną liczbę i jej lustrzane odbicie, to tak otrzymana liczba jest podzielna przez 11, np.: liczba 12 i 21 to 1221 : 11 = 192.